آموزشی

اثبات برخی نامساوی‌ها به کمک اتحادهای جبری

عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

اشاره

ردپای اتحادیه‌های مهم جبری که در ریاضیات پایه آموزش داده می‌شوند، در جای‌جای مباحث دیگر ریاضیات دبیرستانی دیده می‌شود. در اینجا کوشش شده است، در اثبات درستی برخی نامساوی‌ها از کاربردهای گوناگون اتحادهای اساسی جبری استفاده شود. بدون شک موضوع نامساوی‌ها و اثبات آن‌ها همواره مورد تأکید و توجه بوده و مهارت‌های حل این مسائل ضروری انکارناپذیر است.

کلیدواژه‌ها: اتحاد جبری، اثبات نامساوی، واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی، اتحاد مربع

نمونهٔ ۱.

الف) برای هر x و y حقیقی نشان دهید:

$$x^{۲}+y^{۲}+۱\geq xy+x+y$$

ب) برای هر x، y و z دلخواه نشان دهید:

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\geq xy+xz+yz$$

اثبات الف: فرض کنیم رابطهٔ فوق برقرار باشد. در این صورت:

$$۲x^{۲}+۲y^{۲}+۲\geq ۲xy+۲x+۲y$$

$$(x^{۲}-۲xy+y^{۲})+(y^{۲}-۲y+۱)+(x^{۲}-۲x+۱)\geq ۰$$

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$(x-y)^{۲}+(y-۱)^{۲}+(x-۱)^{۲}\geq ۰$$

نامساوی اخیر به‌وضوح برقرار است و روابط همگی برگشت‌پذیرند. بنابراین حکم مسئله برقرار است.

اثبات ب: به طریق مشابه الف صورت می‌گیرد. ابتدا دو طرف نامساوی را در ۲ ضرب کنید.

نمونهٔ ۲. نشان دهید برای هر a و b حقیقی داریم:

$$۲a^{۲}+b^{۲}+۱\geq ۲(a-ba)$$

اثبات: فرض کنیم رابطهٔ بالا درست باشد، بنابراین:

$$(۱)\quad ۲a^{۲}+b^{۲}+۱-۲a+۲ab\geq ۰$$

$$(۲)\quad (a^{۲}+b^{۲}+۲ab)+(a^{۲}-۲a+۱)\geq ۰$$

$$(۳)\quad (a+b)^{۲}+(a-۱)^{۲}\geq ۰$$

رابطهٔ (۳) به‌وضوح برقرار است و روابط همگی برگشت‌پذیرند. پس نامساوی صورت مسئله برقرار است.

نمونهٔ ۳. برای هر a، b و c حقیقی نشان دهید:

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۳\geq ۲(a+b+c)$$

اثبات: شباهت خاصی این نمونه با دو نمونهٔ قبلی دارد. در اینجا می‌توانیم با تکیه بر اتحاد مربع مجموع دو جمله و به‌صورت غیربازگشتی به اثبات نامساوی بپردازیم.

از نابرابری بدیهی $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0$ استفاده کرده و حکم را ثابت کنید.

نمونهٔ ۴. x و y دو عدد حقیقی و مثبت‌اند. نشان دهید:

$$x^4+y^4\ge x^3y+xy^3$$

اثبات: به یاری روش بازگشتی به سراغ درستی اثبات می‌رویم. فرض کنیم نامساوی درست باشد، در این صورت:

$$x^4-x^3y+y^4-xy^3\ge 0$$

$$\Rightarrow x^3(x-y)-y^3(x-y)\ge 0$$

$$\Rightarrow (x^3-y^3)(x-y)\ge 0$$

حال به کمک اتحاد جبری تفاضل مکعب دو جمله داریم:

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

پس:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)(x-y)\ge 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2(x^2+xy+y^2)\ge 0$$

چون x و y مثبت‌اند، x^2+xy+y^2 نیز مثبت و لذا نامساوی اخیر درست است. همچنین همهٔ روابط بالا برگشت‌پذیرند. این موضوع درستی نامساوی صورت مسئله را نتیجه می‌دهد.

نمونهٔ ۵. ثابت کنید که:

الف) $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ (a>0,b>0)$

ب) اگر $a\ge b>0$، آن‌گاه:

$$\frac{(a-b)^2}{8a}\le\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\le\frac{(a-b)^2}{8b}$$

اثبات الف: این نامساوی به نامساوی بین واسطه‌های حسابی و هندسی معروف است و از جمله نامساوی‌های کاربردی به حساب می‌آید. داریم:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$$

پس: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

اثبات ب: ابتدا نشان می‌دهیم:

$$\frac{(a-b)^2}{8a}\le\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$

کافی است ثابت کنیم که:

$$\frac{(a-b)^2}{8a}\le\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

در نتیجه لازم است که نامساوی زیر را ثابت کنیم:

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8a}\le\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

پس باید نشان دهیم:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8a}\le\frac{1}{2}$$

داریم:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8a}=\frac{1}{8}\left(\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(1+\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

اما: $\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\le\frac{1}{2}$، زیرا:

$$a\ge b>0\Rightarrow\frac{b}{a}\le 1\Rightarrow 1+\sqrt{\frac{b}{a}}\le 2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\le\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

همچنین به طریق مشابه ثابت می‌شود که هرگاه $a\ge b>0$، آن‌گاه:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\le\frac{(a-b)^2}{8b}$$

در اثبات درستی نامساوی اخیر نقش پررنگ اتحادهای مربع مجموع و تفاضل دو جمله و اتحاد مزدوج دیده می‌شود.

دو نتیجهٔ دیگر از نامساوی بین واسطه‌های حسابی و هندسی

در سؤال قبل دیدیم که هرگاه a و b مثبت باشند، میانگین حسابی آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی میانگین هندسی آن‌هاست؛ یعنی: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$. از این نامساوی به شیوه‌های گوناگون در اثبات درستی دیگر نامساوی‌ها اثبات می‌شود. در نمونه‌های بعدی به دو نتیجهٔ دیگر از این نامساوی خواهیم پرداخت.

نمونهٔ ۶. ثابت کنید هرگاه a، b و c نامنفی باشند، آن‌گاه:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

نامساوی بین واسطه‌های حسابی و هندسی را یک‌بار برای a و b و بار دیگر برای b و c و همچنین یک‌بار برای a و c می‌نویسیم:

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab},\ \frac{b+c}{2}\ge\sqrt{bc},\ \frac{c+a}{2}\ge\sqrt{ac}$$

پس: $c+a\ge 2\sqrt{ca}$، $b+c\ge 2\sqrt{bc}$ و $a+b\ge 2\sqrt{ab}$

در نتیجه:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge(2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ac})=8abc$$

و حکم ثابت شد.

نمونهٔ ۷. اگر x، y و z اعداد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید:

$$(x+z-y)(z+y-x)(y+x-z)\le xyz$$

اثبات: با توجه به نمونهٔ قبلی و (بدون آنکه به کلیت مسئله خللی وارد شود)، با انتخاب

$$x+z-y=a,\ z+y-x=b,\ y+x-z=c$$

خواهیم داشت:

$$x=\frac{a+c}{2},\ y=\frac{b+c}{2},\ z=\frac{a+b}{2}$$

در نمونهٔ قبلی دیدیم که: $(a+c)(b+c)(a+b)\ge 8abc$

پس:

$$(\frac{a+c}{2})(\frac{b+c}{2})(\frac{a+b}{2})\ge abc$$

$$\Rightarrow xyz\ge (x+z-y)(z+y-x)(y+x-z)$$

و حکم ثابت شد.

کاربردی از اتحاد مربع مجموع ۳ جمله در اثبات نامساوی‌ها

حالا نوبت آن رسیده است که ردپای اتحاد مربع مجموع سه جمله را که به صورت $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ می‌شناسیم، در اثبات درستی یک نامساوی جبری دنبال کنیم. به نمونهٔ زیر توجه کنیم:

نمونهٔ ۸. اگر a، b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، ثابت کنید:

$$3(ab+bc+ac)\le (a+b+c)^2<4(ab+bc+ac)$$

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم: $3(ab+bc+ac)\le (a+b+c)^2$

دیدیم که (نمونهٔ ۱- ب):

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$$

پس:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\ge$$
$$ab+ac+bc+2ab+2ac+2bc$$

اما طرف نخست نامساوی فوق همان اتحاد مربع مجموع سه جمله است. پس:

$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+ac+bc)$$

در نتیجه نابرابری سمت چپ اثبات شد. حال به اثبات نابرابری سمت راست می‌پردازیم.

چون a، b و c طول اضلاع مثلث هستند، پس اندازهٔ هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کمتر است. از این واقعیت استفاده می‌کنیم و اثبات را به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$a<b+c\rightarrow a^2<a(b+c)\rightarrow a^2<ab+ac \quad (1)$$

$$b<a+c\rightarrow b^2<b(a+c)\rightarrow b^2<ab+bc \quad (2)$$

$$c<a+b\rightarrow c^2<c(a+b)\rightarrow c^2<ac+bc \quad (3)$$

از جمع طرفین نامساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$a^2+b^2+c^2<2ab+2ac+2bc$$

در نتیجه: $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc<4ab+4ac+4bc$

و استفاده از اتحاد مربع مجموع سه جمله نتیجه می‌دهد که:

$$(a+b+c)^2<4(ab+ac+bc)$$

مسائل مسابقه‌ها و المپیادها

در ادامه به نمونه مسائلی از مسابقات و المپیادها می‌پردازیم. بدون شک کمتر مسابقه یا المپیادی را می‌توان مثال زد که در آن سؤالی از موضوع نامساوی‌ها مطرح نباشد.

نمونهٔ ۹. بزرگ‌ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر عدد مثبت a با شرط $a-\frac{1}{a}\ge 1$ داشته باشیم:

$$a^3-\frac{1}{a^3}\ge k(a-\frac{1}{a})$$

(المپیاد ریاضی ایران، مرحلهٔ نخست، بهمن ۱۳۸۸)

پاسخ: به کمک اتحاد تفاضل مکعب دو جمله می‌توان نوشت:

$$(a-\frac{1}{a})(a^2+\frac{1}{a^2}+1)\ge k(a-\frac{1}{a})$$

$$\Rightarrow k\le a^2+\frac{1}{a^2}+1\xrightarrow{*}k\le (a-\frac{1}{a})^2+3$$

* توجه کنیم که:

$$a^2+\frac{1}{a^2}=(a-\frac{1}{a})^2+2$$

اما با توجه به شرط مسئله، چون: $a-\frac{1}{a}\ge 1$، پس:

$$(a-\frac{1}{a})^2+3\ge 1+3=4$$

پس بیشترین مقدار ممکن برای k برابر ۴ است.

نمونهٔ ۱۰. برای هر a، b و c متعلق به اعداد حقیقی مثبت، ثابت کنید:

الف) $4(a^3+b^3)\ge (a+b)^3$

ب) $9(a^3+b^3+c^3)\ge (a+b+c)^3$

(سی و دومین المپیاد ریاضی، انگلستان ۱۹۹۶)

(منبع: راهنمای المپیاد ریاضی **ترجمه هوشنگ شرقی**، انتشارات مدرسه، ۱۳۸۴)

اثبات الف: فرض کنیم نامساوی برقرار باشد. پس:

$$4a^3+4b^3\ge a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$

$$3a^3+3b^3\ge 3ab(a+b)$$

$$a^3+b^3\ge ab(a+b)$$

$$a^3-a^2b+b^3-ab^2\ge 0$$

$$a^2(a-b)-b^2(a-b)\ge 0$$

$$(a-b)(a^2-b^2)\ge 0\rightarrow (a-b)^2(a+b)\ge 0$$

چون a و b مثبت‌اند، پس نامساوی اخیر برقرار است و همهٔ روابط برگشت‌پذیرند. بنابراین براساس اثبات به روش بازگشتی حکم برقرار است.

اثبات ب: با توجه به نابرابری الف داریم:

$$۴(a^۳+b^۳)\ge(a+b)^۳ \quad (۱)$$
$$۴(a^۳+c^۳)\ge(a+c)^۳ \quad (۲)$$
$$۴(b^۳+c^۳)\ge(b+c)^۳ \quad (۳)$$

از (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$۴(۲a^۳+۲b^۳+۲c^۳)\ge(a+b)^۳+(b+c)^۳+(a+c)^۳$$
$$\to ۸(a^۳+b^۳+c^۳)\ge ۲(a^۳+b^۳+c^۳)$$
$$+۳(a^۲b+ab^۲+a^۲c+ac^۲+b^۲c+bc^۲)$$

به دو طرف نابرابر اخیر $a^۳+b^۳+c^۳$ اضافه می‌کنیم:

$$۹(a^۳+b^۳+c^۳)\ge ۳(a^۳+b^۳+c^۳+a^۲b+ab^۲$$
$$+b^۲c+bc^۲+a^۲c+ac^۲)$$

حال کافی است نشان دهیم:

$$۳(a^۳+b^۳+c^۳+a^۲b+ab^۲+b^۲c+bc^۲+a^۲c+ac^۲)$$
$$\ge(a+b+c)^۳ \quad (*)$$

اما:

$$(a+b+c)^۳=((a+b)+c)^۳$$
$$=(a+b)^۳+۳(a+b)^۲c+۳(a+b)c^۲+c^۳$$
$$=a^۳+b^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+۳a^۲c+۳b^۲c+۶abc+$$
$$۳ac^۲+۳bc^۲+c^۳$$

با جای‌گذاری برابری اخیر در (*) و ساده کردن، کافی است نشان دهیم:

$$a^۳+b^۳+c^۳\ge ۳abc$$

اما طبق اتحاد اولر داریم:

$$a^۳+b^۳+c^۳-۳abc$$
$$=(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-ac-bc)$$

از آنجا که a، b و c اعداد حقیقی مثبت‌اند، پس: $a+b+c>۰$

همچنین دیدیم که: $a^۲+b^۲+c^۲\ge ab+ac+bc$، پس: $(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-ac-bc)\ge ۰$.

این نتیجه می‌دهد که: $a^۳+b^۳+c^۳\ge ۳abc$ و اثبات به پایان می‌رسد.

در اثبات دو نامساوی اخیر نیز نقش پررنگ اتحادهای جبری دیده شد.

نمونهٔ ۱۱. اگر a، b و c مثبت باشند، نشان دهید:

$$\frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{c+a}\le\frac{(a+b+c)^۲}{۶abc}$$

(طرح شده توسط یاکوب علی‌اف، دانشگاه باکو آذربایجان)

اثبات: داریم:

$$(a+b)^۲-۴ab=(a-b)^۲\ge ۰$$

و بنابراین: $۴ab\le(a+b)^۲$. به‌طور مشابه: $۴bc\le(b+c)^۲$ و $۴ac\le(a+c)^۲$. بنابراین:

$$۴abc(\frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{c+a})$$
$$=(\frac{۴ab}{a+b})c+(\frac{۴bc}{b+c})a+(\frac{۴ca}{c+a})b$$
$$\le(a+b)c+(b+c)a+(c+a)b$$
$$=۲(ab+bc+ca) \quad (۱)$$

از سوی دیگر، با توجه به نامساوی شناخته شدهٔ

$$ab+bc+ca\le a^۲+b^۲+c^۲$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$۳\left(ab+bc+ca\right)\le a^۲+b^۲+c^۲+۲\left(ab+ac+bc\right)$$
$$=\left(a+b+c\right)^۲$$

$$\Rightarrow ۲(ab+bc+ca)\le\frac{۲}{۳}(a+b+c)^۲ \quad (۲)$$

از مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$۴abc(\frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{c+a})\le\frac{۲}{۳}(a+b+c)^۲$$

از تقسیم دو طرف نابرابری اخیر بر ۴abc، اثبات مسئله کامل می‌شود.

***

دامنهٔ کاربرد اتحادها در اثبات نابرابری‌ها به مسائل بالا محدود نمی‌شود، اما نمونه‌های فوق احتمالاً توانسته‌اند بار دیگر ضرورت آموزش کاربردی اتحادها را و فراگیر بودن آن‌ها را در حوزه‌های گوناگون ریاضی یادآوری کنند.

تمرین

۱. a و b عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید: $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\ge\frac{۴}{a+b}$.

۲. a و b عددهای حقیقی‌اند. ثابت کنید:

الف) $(a^۲-b^۲)^۲\ge ۴ab(a-b)^۲$

ب) $(a^۲-b^۲)(a^۴-b^۴)\le(a^۳-b^۳)^۲$

۳. x عددی مثبت است. نشان دهید: $x^۳+\frac{۱}{x^۳}\ge x^۲+\frac{۱}{x^۲}$.

۴. a و b عددهای مثبت‌اند. ثابت کنید: $\frac{a^۳+b^۳}{۲}\ge(\frac{a+b}{۲})^۳$.